УДК 629.5.015.4
DOI 10.33082/2226-1915 -2-2019-91-106

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЦЕНТРОВКИ ВАЛОПРОВОДА С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ ОБОБЩЁННЫМ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

А.И. Урсолов

магистр, аспирант кафедры Теории и проектирования судов

Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова

Аннотация. Рассмотрена задача расчёта изгиба судового валопровода с учётом деформаций кронштейна и деформации вкладыша кормового подшипника, представленного нелинейным упругим основанием. Предложен обобщённый метод релаксации в последовательных приближениях, обеспечивающий сходимость расчётов в задачах с обратными связями. Эффективность применения метода по сравнению с методом простых итераций показана на примере расчёта изгиба типичного проекта валопровода, имеющего кронштейн.

Ключевые слова: валопровод, кронштейн, подшипник, нелинейное упругое основание, метод конечных элементов, метод последовательных приближений, релаксация.

УДК 629.5.015.4
DOI 10.33082/2226-1915 -2-2019-91-106

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ЦЕНТРУВАННЯ ВАЛОПРОВІДІВ ЗІ ЗВОРОТНІМИ ЗВ'ЯЗКАМИ УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦІЇ

О.И. Урсолов

магістр, аспірант кафедри Теорії та проектування суден

Національний університет кораблебудування ім. адм. Макарова

Анотация. Розглянута задача розрахунку згину судового валопроводу з урахуванням деформацій вкладишу кормового підшипника, який представлено нелінійною пружною основою, і деформації кронштейна. Запропоновано метод релаксації у послідовних наближеннях, що забезпечує збіжність розрахунків у задачах зі зворотними зв'язками. Ефективність використання методу порівняно з методом простих ітерацій показана на прикладі розрахунку типового проекту валопроводу, що має кронштейн.

Ключові слова: валопровід, кронштейн, підшипник, нелінійна пружна основа, метод скінченних елементів, метод послідовних наближень, релаксація.

© Урсолов А.И., 2019

UDC 629.5.015.4

DOI 10.33082/2226-1915 -2-2019-91-106

THE SOLUTION OF SHAFTING ALIGNMENT PROBLEMS WITH FEEDBACK USING THE GENERALIZED RELAXATION METHOD

O.I. Ursolov

postgraduate student, master department of Theory and design of ship

Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Abstract. *The marine shafting bending calculation is considered. The calculation takes into account bracket deflections and deformations of the aftmost bearing bush, which is represented as a non-linear elastic foundation. The relaxation method for successive approximations is proposed, providing calculation convergence in problems with feedback. The efficiency of the method compared to the simple successive approximations is shown in the example of the bending calculation of typical shafting design with a bracket.*

Keywords: *shafting, bracket, bearing, non-linear elastic foundation, finite element method, successive approximation method, relaxation.*

Введение. При выполнении расчётов, связанных с центровкой судового валопровода, возникает необходимость в поиске статического или квазистатического равновесия между формой изгиба валов с одной стороны и напряжённо-деформированным состоянием подшипников с другой. К ряду таких задач относятся контактная задача покоящегося валопровода на деформируемых вкладышах подшипников, деформация опорных конструкций подшипников (например, кронштейнов или фундаментов) при изменении нагрузок на опоры, эластогидродинамическая смазка в подшипниках валопровода во время его эксплуатации и др.

От того, насколько точно описано взаимодействие вала и подшипников в математической модели, зависит надёжность и долговечность подшипников валопровода, особенно кормового дейдвудного. При этом, достаточно сложные математические модели могут содержать нелинейности, наиболее простым и распространённым методом преодоления которых является метод последовательных приближений. Однако, не всегда возможно найти верное решение из-за расходимости результатов расчёта в случае значительной нелинейности [1].

В общем, существует два подхода к решению нелинейных задач с обратной связью: прямые и итерационные, которые могут быть реализованы аналитически или численно. В прямом подходе все звенья системы изучаются одновременно, что зачастую вызывает трудности из-за сложного математического аппарата решения общей задачи.

В то же время итерационные методы являются более технологичными, они позволяют использовать аппарат линейных теорий, хотя при их реализации и возникают проблемы, связанные с точностью и сходимостью расчётов [3].

Хорошо известны методы решения нелинейных алгебраических уравнений с одной переменной (метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод Ньютона, метод простых итераций) и систем нелинейных уравнений (метод простых итераций, метод Ньютона) [3]. В книгах [1; 4; 5] описан ряд других методов, в частности, метод шагового нагружения, самокорректирующий метод, различные модификации метода Ньютона-Рафсона, их гибридные варианты. Общими недостатками этих методов есть то, что решение задачи существенно зависит от выбора начального приближения и возможности аналитического представления решения, что не всегда возможно, особенно при использовании численных методов.

В статье [2] приведен алгоритм решения задачи изгиба судового валопровода с учётом его взаимодействия с жидкой смазкой и упругими перемещениями вкладыша дейдвудного подшипника. При этом, квазистатический баланс между давлениями в смазке и упругими перемещениями вкладыша определялся методом последовательных приближений с использованием двух методов релаксации для улучшения сходимости расчёта. Вначале расчёта применялась следующая корректировка упругих перемещений вкладыша

$$u_i^* = u_{i-1} + \beta(u_i - u_{i-1}), \quad 0 < \beta < 1, \quad (1)$$

и если она не обеспечивала сходимости, то далее алгоритм предусматривал следующую схему:

$$u_i^* = \left[\sum_{m=i-4}^i u_m \right] / 5, \quad (2)$$

где i – номер итерации;

u_i и u_i^* – рассчитанное и исправленное значение перемещений вкладыша;

β – коэффициент релаксации.

Аналогичный формуле (1) подход также широко используется в методах вычислительной гидродинамики (computational fluid dynamics) [6] и задач взаимодействия жидкости с упругими телами (fluid structure interaction) [7].

Далее, в статье [8] для обеспечения сходимости в расчёте эластогидродинамической смазки использован псевдо-динамический подход с введением искусственного демпфирования. После несложных преобразований выражений, приведенных в [8], можно получить следующую формулу:

$$u_i^* = (1 + \alpha / \Delta t) u_i - (\alpha / \Delta t) u_{i-1}, \quad (3)$$

где α – коэффициент демпфирования;

Δt – шаг по времени, а сама формула (3) по сути имеет ту же структуру, что и в (1).

Также, для решения задач с обратными связями применяют методы оптимизации [2; 9], главным преимуществом которых является независимость итераций друг от друга, что практически нейтрализует проблему расходимости расчёта. Однако, в этих методах существуют ограничения на количество неизвестных, а также возможность завершения оптимизации на локальном экстремуме целевой функции, а не глобальном, что является неверным решением.

Таким образом, автор ставит целью статьи совершенствование существующих подходов к релаксации, применяемых в методе последовательных приближений, для обеспечения более надёжной сходимости в задачах центровки судовых валопроводов за приемлемое количество итераций.

Постановка задачи расчёта изгиба валопровода. Рассмотрим постановку задачи расчёта изгиба валопровода судна, кормовой подшипник которого представлен сплошным нелинейным односторонним упругим основанием (УО). Кроме того, кормовой подшипник находится в кронштейне, который может деформироваться под действием нагрузки на подшипник. Цель такого расчёта – найти параметры центровки валопровода исходя из статического равновесия валопровода, кормового подшипника и кронштейна.

Валопровод и деформируемый вкладыш подшипника можно представить как балку, лежащую на нелинейном УО, изгиб которой можно определить методом конечных элементов (МКЭ) [10]

$$([K_B] + [K_{YO}(w)]) \cdot \{w\} = \{p\}, \quad (4)$$

где $[K_B]$ – матрица жесткости валопровода;

$[K_{YO}(w)]$ – матрица жесткости эквивалентного УО;

$\{w\}$ – вектор узловых перемещений валопровода;

$\{p\}$ – вектор внешних узловых нагрузок.

В уравнении (4) для формирования матрицы жёсткости валопровода $[K_B]$ использовалась матрица жёсткости стержневого конечного элемента с учётом сдвига [11], а при формировании матрицы жёсткости УО $[K_{YO}]$ – матрица жёсткости стержневого конечного элемента на УО с переменной жёсткостью основания по длине элемента [12].

Распределённая реакция нелинейного УО типа Винклера выражается формулой

$$r(x, w_{YO}) = -k(x, w_{YO}) \cdot w_{YO}(x), \quad (5)$$

где $k(x, w_{YO})$ – коэффициент жёсткости, в свою очередь также зависящий от просадки УО w_{YO} , Н/м².

Коэффициент жёсткости УО k равен нулю при отрыве вала от поверхности вкладыша и вне кормового подшипника. Из формулы (5) получим выражение для определения коэффициента жёсткости при наличии контакта

$$k(x, w_{yO}) = -r(x, w_{yO}) / w_{yO}(x). \quad (6)$$

Поскольку кронштейн, как правило, представляет собой достаточно податливую конструкцию, его деформации от изменения нагрузки на подшипник могут приводить к значительным линейным и угловым перемещениям последнего. Эти перемещения могут быть достаточно точно определены в рамках линейной теории упругости с помощью решения уравнения, полученного МКЭ

$$\begin{bmatrix} k_{R\Delta} & k_{R\Psi} \\ k_{M\Delta} & k_{M\Psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{кр} \\ M_{кр} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где Δ и Ψ – линейное и угловое смещение подшипника кронштейна, м и рад. соответственно;

$R_{кр}$ и $M_{кр}$ – нагрузка на подшипник кронштейна и момент нагрузки, определённый относительно середины кронштейна, Н и Нм соответственно;

$k_{R\Delta}$, $k_{R\Psi}$, $k_{M\Delta}$ и $k_{M\Psi}$ – коэффициенты жёсткости кронштейна, которые предварительно определяются, например, моделированием в МКЭ твердотельной модели кронштейна или его стержневой идеализации.

Нагрузка и момент на подшипнике определяются по формулам

$$R_{кр} = \int_{x_{п}-L/2}^{x_{п}+L/2} r(x, w_{yO}) dx; \quad M_{кр} = \int_{x_{п}-L/2}^{x_{п}+L/2} (x - x_{п}) r(x, w_{yO}) dx, \quad (8)$$

где L – длина подшипника, м; $x_{п}$ – координата x середины подшипника, м.

С учётом линейного Δ и углового Ψ смещений кронштейна, просадка УО определяется по формуле

$$w_{yO}(x) = w(x) - \Delta + (x - x_{п})\Psi,$$

где w – перемещения вала в рассматриваемом сечении, м.

Таким образом, при данной постановке задачи, узловые значения перемещений валопровода $w(x)$, коэффициента жёсткости УО $k(x, w_{yO})$, а также нагрузки на кронштейн $R_{кр}$ и $M_{кр}$ и его смещения Δ и Ψ являются взаимозависимыми величинами. В рамках уравнений (4), (6), (7) и (8), решение задачи согласованного определения этих величин можно попытаться получить методом простых итераций.

При этом возможны три сценария процесса последовательных приближений: 1) сходимость, 2) расходимость и 3) закливание.

В первом случае, последующие решения с каждой итерацией становятся всё ближе к предыдущим и в итоге сходятся к точному решению с допустимой погрешностью ε . В случае же расходимости наоборот, в итерациях решения отдаляются друг от друга. Зацикливание, по сути, является частным случаем расходимости, при котором решения повторяются с периодичностью в две или более итераций. Кроме того, выбор начального приближения влияет на тип сходимости и при одном начальном приближении решение может быстро сходиться, а при другом – расходиться. К сожалению, не всегда возможно подобрать «удачное» начальное приближение, близкое к точному из-за неизвестности последнего.

Для обеспечения стабильной сходимости в методе последовательных приближений применяют различного рода релаксации [2; 8; 6; 7]. Релаксацией называют специальные поправки к переменным, уменьшающих их относительное изменение от итерации к итерации и, таким образом, улучшающих сходимость процесса приближений. Ниже описан обобщённый метод релаксации приближений, обеспечивающий улучшенную сходимость решения и позволяющий осуществлять настройку с учётом особенностей решаемой задачи.

Описание метода релаксации приближений. Рассмотрим задачу с обратными связями на примере двух неизвестных переменных x и y , значения которых однозначно заданы выражениями

$$y = F[x] \quad (9)$$

$$x = G[y]. \quad (10)$$

В качестве x и y могут выступать скалярные величины, вектора или матрицы, а в качестве операторов $F[x]$ и $G[y]$ – функции, как результат решения алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений, или системы таких уравнений, например, (4), (6) и (7).

Обобщая подходы к релаксации, приведенные в [1; 2; 4-7], дополняя и расширяя их условиями, описанными ниже, скорректированное значение переменной y_i^* на каждой итерации определяется формулой

$$y_i^* = C_1(i)y_i + \sum_{m=2}^M C_m(i)y_{i-m+1}, \quad (11)$$

где $i = 2, 3, \dots$;

i_{max} – номер итерации;

$C_m(i)$ – коэффициенты влияния на i -ой итерации;

M – количество используемых в релаксации итераций;

$y_i = F[x_i]$ – результат расчёта функции y на i -ой итерации.

При этом, значение x_i на каждой итерации определяется не через напрямую рассчитанное значение y_i , как в простом методе последовательных приближений, а через исправленное значение y_i^*

$$x_i = G[y_{i-1}^*].$$

Коэффициенты влияния $C_m(i)$, входящие в формулу (11), должны отвечать двум условиям: $\sum_{m=1}^M C_m(i) = 1$ и $C_m(i) > 0$. Кроме того, важной особенностью данного метода является то, что коэффициенты влияния $C_m(i)$ зависят от номера итерации до некоторой N -ой итерации, а после неё принимают постоянные значения. Это сделано с целью более «жёсткой» стабилизации на начальных критических итерациях, поскольку в противном случае уже с самого начала расчёта процесс может иметь значительную расходимость, которую далее невозможно стабилизировать.

В первую очередь вычисляется коэффициент влияния $C_1(i)$, рост которого на первом участке может быть задан линейной

$$C_1(i) = \begin{cases} (C_1(N) - C_1(2))(i - 2) / (N - 2) + C_1(2) & \text{если } i < N, \\ C_1(N) & \text{если } i \geq N, \end{cases} \quad (12)$$

либо параболической зависимостью

$$C_1(i) = \begin{cases} (C_1(2) - C_1(N))[(i - N) / (N - 2)]^2 + C_1(2) & \text{если } i < N, \\ C_1(N) & \text{если } i \geq N, \end{cases} \quad (13)$$

где $C_1(2)$, $C_1(N)$ – заданные минимальный и максимальный коэффициенты влияния i -ой итерации,

N – заданный номер итерации, на которой коэффициенты влияния перестают меняться. При этом, коэффициент влияния первой итерации, в большинстве задач, не должен уменьшаться $C_1(N) \geq C_1(2)$.

Для определения остальных коэффициентов C_m необходимо задать вектор R размерности $M-1$, определяющий отношение между ними, все элементы которого являются положительными числами и не зависят от номера итерации $R = \{r_2, r_3, \dots, r_m, \dots, r_M\}$, $r_m > 0$. При этом значение имеет отношения между элементами вектора R , а не их абсолютные значения. Следовательно, коэффициенты влияния старше первого можно найти с помощью выражения

$$C_m(i) = \begin{cases} (1 - C_1(i)) \cdot r_m / \sum_{j=2}^M r_j & \text{если } m \geq i, \\ 0 & \text{если } m < i. \end{cases}$$

Таким образом, метод релаксации позволяет контролировать сходимость расчёта с помощью следующих входных параметров:

- характер участка усиления коэффициента $C_1(i)$: линейный (12) или параболический (13);
- начальное значение коэффициента $C_1(2)$;
- конечное значение коэффициента $C_1(N)$;
- количество итераций N , при которых коэффициенты влияния изменяются;
- количество итераций M , которые участвуют в релаксации;
- отношение между весовыми коэффициентами итераций R .

В качестве примера, на рис. 1 приведены графики коэффициентов влияния для линейного и параболического участка стабилизации при следующих параметрах метода: $C_1(2) = 0,1$; $C_1(N) = 0,6$; $N = 10$; $M = 4$; $R = \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$.

Рис. 1. Коэффициенты влияния итераций:
а – линейный участок стабилизации;
б – параболический участок стабилизации

В общем случае, выбор входных параметров метода должен производиться с учётом математической модели, заложенной в конкретную задачу, и основываться на накопленном опыте использования метода.

При выполнении расчётов по приведенной выше схеме выход из цикла последовательных приближений производится тогда, когда исправленные значения на i -ой итерации y_i^* отличаются от исправленных значений на предыдущей итерации y_{i-1}^* и истинных значений на i -ой итерации y_i меньше, чем на заданную допустимую погрешность расчёта $\varepsilon \ll 1$. Также, если переменная y не сошлась за заданное количество итераций i_{max} , то расчёт также аварийно завершается для предотвращения ошибки в программе.

На рис. 2 приведена общая блок-схема выполнения расчёта методом последовательных приближений с использованием предложенного метода релаксации.

Частные случаи обобщённого метода релаксации. Метод релаксации назван «обобщённым», поскольку несложно показать, что, при определённых сочетаниях параметров, предложенный метод упрощается до известных подходов, которые приведены ниже.

1) прямой метод последовательных итераций (метод простых итераций) [1; 4]: $C_1(2) = C_1(N) = 1$; величины N, M, R не имеют значения;

2) метод шагового нагружения [1; 4; 5]: $C_1(N) = 1$; $C_1(2) = C_1(N)/N$, $N = i_{max}$; $M = 1$; величина R не имеет значения;

3) простая релаксация (1) из [2; 6; 7]: $C_1(2) = C_1(N) = \beta = const$; $M = 1$; величины N, R не имеют значения;

4) релаксация (2) из [2]: $C_1(2) = C_1(N) = 0.2$; $M = 5$; $R = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}$, величина N не имеет значения.

5) псевдо-динамический подход с искусственным демпфированием (3): $C_1(2) = C_1(N) = 1 + \alpha/\Delta t = const$, где $\alpha < 0$; $M = 1$; величины N, R не имеют значения.

Таким образом, предложенный метод релаксации позволяет производить более гибкую настройку алгоритма итераций, чем приведенные выше методы. Следует также заметить, что ни в одном из приведенных методов не применялся подход к разделению расчёта на два участка (участки стабилизации и постоянных коэффициентов), как это сделано в предложенном методе.

Подбор параметров метода релаксации для решаемой задачи.

Один из возможных системных подходов к подбору параметров метода релаксации для определённой задачи следующий. Сначала выбираются типовые условия расчёта. В данном случае, были отобраны несколько типичных проектов валопроводов с кронштейнами. Далее, выполняется расчёт с применением предложенной релаксации при использовании различных варьируемых параметров. В первую очередь следует менять $C_1(2)$, $C_1(N)$, N , поскольку они оказывают наибольшее влияние на скорость и сходимость расчёта.

Рис. 2. Блок-схема выполнения расчёта с применением релаксации

Для достижения наилучшего результата следует затем изменять тип участка стабилизации (линейная или параболическая), значения M и R . Из массива использованных комбинаций параметров, следует принять те, которые обеспечивают решение задачи за наименьшее количество итераций, то есть являются оптимальными.

Предложенный метод релаксации применён для согласования значений прогибов вала w и коэффициентов жёсткости УО k . В качестве переменной x был принят вектор узловых перемещений валопровода, а переменной y – коэффициенты жёсткости УО. Были подобраны следующие оптимальные параметры метода релаксации [13]: тип участка стабилизации – параболический; $C_1(2) = 0,001$; $C_1(N) = 1$; $N = 30$; $M = 3$; $R = \{1 \ 1\}$.

Также, с помощью предложенного метода релаксации обеспечена сходимость расчёта смещений подшипника кронштейна (линейных Δ и угловых Ψ) и нагрузки на подшипник и момента нагрузки. Здесь, в качестве переменной x приняты нагрузка и момент на подшипнике, а корректируемой переменной y являются упругие смещения подшипника. Для данной задачи параметры метода релаксации имеют следующий вид: тип участка стабилизации – линейная; $C_1(2) = 0,5$; $C_1(N) = 0,1$; $N = 30$; $M = 3$; $R = \{1 \ 1\}$.

Как видно, в третьей задаче $C_1(N) < C_1(2)$, вопреки ранее заявленному тезису о том, что коэффициент $C_1(i)$ не должен уменьшаться. Дело в том, что здесь оказалось более эффективным как раз наоборот, задать относительно высокий начальный коэффициент, а затем за 30 итераций постепенно уменьшать его. Этот факт иллюстрирует гибкость метода и широкий охват задач, в которых можно его применить.

Пример расчёта. Для демонстрации эффективности предложенного метода релаксации, был выполнен расчёт изгиба валопровода с кронштейном, расчетная схема которого представлена на рис. 3.

Рис. 3. Расчётная схема валопровода

Валопровод имеет постоянное сечение диаметром $d = 0,5$ м и общую длину $L_B = 18$ м. Механические характеристики материала валопровода следующие: $E_B = 2,06 \cdot 10^5$ МПа – модуль упругости, $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона, $\rho = 7850$ кг/м³ – плотность. Валопровод нагружен распределённой силой собственного веса $q = -15,1$ кН/м и сконцентрированной силой веса гребного винта $P = -100$ кН.

Кроме того, кормовой подшипник расположен в кронштейне, который имеет следующие жёсткости: $k_{R\Delta} = 10^9$ Н/м, $k_{R\Psi} = 10^7$ Н/рад, $k_{M\Delta} = 10^7$ Нм/м и $k_{M\Psi} = 5 \cdot 10^8$ Нм/рад.

Валопровод поддерживают четыре подшипника с положением их центра по длине 1, 6, 11 и 17 м от кормового конца валопровода соответственно. Кормовой подшипник представлен УО, а остальные три подшипника простыми жесткими точечными опорами. Кормовой подшипник имеет следующие параметры: $c = 0,8$ мм – радиальный зазор подшипника, $L = 1$ м – длина вкладыша, $t = 27$ мм – толщина вкладыша, $E = 440$ МПа – модуль упругости материала вкладыша.

Расчёт выполнялся с заданной относительной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ в двух вариантах: методом простых итераций и с применением разработанной релаксации. На рис. 4 представлены графики сходимости линейных и угловых смещений кормового подшипника в двух вариантах расчёта. Окончательные параметры кормового подшипника следующие: $\Delta = -0,192$ мм – линейное смещение, $\Psi = -0,0384$ мм/м – угловое смещение, $R_{кр} = 192,0$ кН – нагрузка на подшипник, $M_{кр} = 19,5$ кНм – момент нагрузки относительно центра подшипника.

Как видно из рис. 4, при использовании метода простых итераций (рис. 4 а и 4 б), решение не может быть найдено, поскольку значения смещений подшипника заклиниваются в силу чувствительности системы. При использовании разработанной релаксации, смещения подшипников постепенно с каждой итерацией принимают значения всё более близкие к равновесным (рис. 4. в и 4. г). Таким образом, метод обеспечил сходимость расчёта за 33 итерации, в то время, когда метод простых итераций не приводит к успешному решению рассматриваемой задачи.

Выводы. В статье рассмотрена задача изгиба валопровода с учётом деформации вкладыша подшипника как УО и деформации кронштейна. Предложен метод релаксации, обеспечивающий сходимость в описанной задаче при её численном решении методом последовательных приближений. Метод релаксации позволяет выполнять настройку с учётом особенностей математической модели, подбирая параметры, обеспечивающие наиболее надёжную сходимость при минимально возможном числе итераций. Следует заметить, что использование метода, даже с оптимальными параметрами, не гарантирует сходимости в ста процентах случаев, однако значительно увеличивает вероятность успешного завершения расчёта за конечное число итераций.

Рис. 4. Сходимость значений смещений подшипников кронштейна:
а – линейное смещение, метод простых итераций;
б – угловое смещение, метод простых итераций; в – линейное смещение,
релаксация; г – угловое смещение, релаксация;
— расчётные смещения подшипника;
--- напрямую рассчитанные смещения подшипника

Предложенный метод релаксации является обобщённой и расширенной версией известных подходов к релаксации, применяемой в методе последовательных приближений, например, метод последовательного нагружения и некоторых других. Следует заметить, что разработанный метод может быть применён не только для расчёта изгиба валопровода, а также и для широкого ряда задач в различных областях науки и техники где присутствует необходимость численного решения задач с обратными связями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Палий О.М. *Справочник по строительной механике корабля* / О.М. Палий. Л.: Судостроение, 1982. Т. 2. 464 с.
2. Mourelatos Z.P. *Finite-element analysis of elastohydrodynamic stern bearings* / Z.P. Mourelatos, M.G. Parsons // *SNAME Transactions*, 1985. Vol. 93. № 11. P. 225-259.
3. Турчак Л.И. *Основы численных методов* / Л.И. Турчак. М.: Наука, 1987. 320 с.
4. Постнов В.А. *Строительная механика корабля и теория упругости* / В.А. Постнов, В.П. Суслов. Л.: Судостроение, 1987. Т. 1. 288 с.
5. Дарков А.В. *Строительная механика* / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. М.: Высшая школа, 1986. 8 изд. 607 с.
6. Jayanti S. *Computational Fluid Dynamics for Engineers and Scientists* / S. Jayanti. Dordrecht: Springer, 2018. 402 p. ISBN: 978-94-024-1215-4.
7. Tang T. *Modeling of soil-water-structure interaction: Ph. D. thesis* / T. Tang. – Kgs. Lyngby: Technical University of Denmark, 2014.
8. De Kraker A., van Ostayena R.A., Rixen D.J. *Calculation of Striebeck curves for (water) lubricated journal bearings* / A. de Kraker, R.A. van Ostayena, D.J. Rixen // *Tribology International*. 2007. Vol. 40. P. 459-469.
9. Урсолов А.И. *Применение методов оптимизации в расчете изгиба судового валопровода, подшипники которого работают в режиме гидродинамической смазки* / А.И. Урсолов, Ю.А. Батрак // *Сучасні технології проектування, побудови, експлуатації і ремонту суден, морських технічних засобів і інженерних споруд: Матеріали VII міжнар. наук.-техн. конф. Миколаїв: НУК, 2017. С. 64-67.*
10. Постнов В.А. *Метод конечных элементов в расчётах судовых конструкций* / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.

11. Przemieniecki J.S. *Theory of matrix structural analysis* / J.S. Przemieniecki. New York: Dover Publications, Inc., 1968. 468 p.
12. Батрак Ю.А., Урсолов А.И. Матрица жёсткости стержневого конечного элемента, лежащего на нелинейном упругом основании / Ю.А. Батрак, А.И. Урсолов // Сучасні технології проектування, побудови, експлуатації і ремонту суден, морських технічних засобів і інженерних споруд: Матеріали Всеукраїнської наук.-техн. конф. з міжнародною участю. Миколаїв: НУК, 2016.
13. Урсолов А.И. Расчёт изгиба вала, лежащего на подшипниках, представленных нелинейным односторонним упругим основанием конечной длины / А.И. Урсолов, Ю.А. Батрак // Інновації в суднобудуванні та океанотехніці: Матеріали VII наук.-техн. конф. Миколаїв: НУК, 2016.

REFERENCES

1. Paliy O.M. (1982) *Spravochnik po stroitel'noy mekhanike korablya* [Handbook of ship structural mechanics]. Leningrad: Sudostroenie, Vol. 2, 464 p. (in Russian)
2. Mourelatos Z.P., Parsons M.G. (1985) Finite-element analysis of elastohydrodynamic stern bearings. *SNAME Transactions*. Vol. 93., no. 11, pp. 225-259.
3. Turchak L.I. (1987) *Osnovy chislennykh metodov* [Fundamentals of Numerical Methods]. Moscow: Nauka, 320 p. (in Russian)
4. Postnov V.A., Suslov V.P. (1987) *Stroitel'naya mekhanika korablya i teoriya uprugosti* [Structural mechanics of the ship and the theory of elasticity]. Leningrad: Sudostroenie, Vol. 1, 288 p. (in Russian)
5. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. (1986) *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola, 8 ed, 607 p. (in Russian)
6. Jayanti S. (2018) *Computational Fluid Dynamics for Engineers and Scientist*. Dordrecht: Springer, 402 p. ISBN: 978-94-024-1215-4.
7. Tang T. (2014) *Modeling of soil-water-structure interaction* (PhD Thesis) Kgs. Lyngby: Technical University of Denmark.
8. De Kraker A., van Ostayen R.A., Rixen D.J. (2007) Calculation of Stribeck curves for (water) lubricated journal bearings. *Tribology International*, Vol. 40, pp. 459-469.

9. Ursolov A.I., Batrak Yu.A. (2017) *Primenenie metodov optimizatsii v raschete izgiba sudovogo valoprovoda, podshipniki kotorogo rabotayut v rezhime gidrodinamicheskoy smazki* [The use of optimization methods in bending calculation of the marine shaftline with hydrodynamic lubricated bearings]. *Proceedings of the Suchasni tekhnologii proektuvannia pobudovy ekspluatatsii i remontu suden morskyykh tekhnichnykh zasobiv i inzhenernykh sporud materialy VII mizhnar. nauk.-tekhn. konf., Mykolaiv: NUK*, pp. 64-67 (in Russian)
10. Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. (1974) *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruktsiy* [The finite element method in the calculation of ship constructions]. Leningrad: Sudostroenie, 344 p. (in Russian)
11. Przemieniecki J.S. (1968) *Theory of matrix structural analysis*. New York: Dover Publications, Inc., 468 p.
12. Batrak Yu.A., Ursolov A.I. (2016) *Matritsa zhestkosti sterzhneвого konechnogo elementa, lezhashchego na nelineynom uprugom osnovanii* [Stiffness matrix of a beam finite element that lies on nonlinear elastic foundation]. *Proceedings of the Suchasni tekhnologii proektuvannia pobudovy ekspluatatsii i remontu suden morskyykh tekhnichnykh zasobiv i inzhenernykh sporud materialy vse-ukrainskoi nauk.-tekhn. konf. z mizhnarodnoiu uchastiu., Mykolaiv: NUK*. (in Russian)
13. Ursolov A.I., Batrak Yu.A. *Raschet izgiba vala, lezhashchego na podshipnikakh, predstavlenykh nelineynym odносторонним uprugim osnovaniem konechnoy dliny* [The calculation of the shaft bending that lying on the bearings presented by a nonlinear unilateral elastic foundation with finite length]. *Proceedings of the Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi materialy VII nauk.-tekhn. konf., Mykolaiv: NUK*. (in Russian)

Стаття надійшла до редакції 15.11.2019

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Теорія та проектування суден» Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова **В.О. Некрасов**

кандидат технічних наук, доцент, директор ПП «Інтелектуальні Морські Технології» **Ю.А. Батрак**